Løsningsforslag prøveeksamen

Oppgave 1

a)

$$P(X < 50.0) = P(\frac{X - 50.5}{1.1} < \frac{50.0 - 50.5}{1.1}) = P(Z < -0.45) = \underline{\underline{0.326}}$$

$$P(\bar{X} < 50.0) = P(\frac{\bar{X} - \mathrm{E}(\bar{X})}{\sqrt{\mathrm{Var}(\bar{X})}} < \frac{50.0 - \mathrm{E}(\bar{X})}{\sqrt{\mathrm{Var}(\bar{X})}}) = P(Z < \frac{50.0 - 50.5)}{\sqrt{1.1^2/10}}) = P(Z < -1.44) = \underline{\underline{0.075}}$$

Her har vi brukt at $\mathrm{E}(\bar{X}) = \mu$ og $\mathrm{Var}(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$.

b) Vi er i situasjonen med normalfordeling med ukjent μ og ukjent σ og $(1-\alpha)100\%$ konfidensintervallet for μ er da gitt ved

$$[\bar{X} - t_{\alpha/2,n-1}\frac{S}{\sqrt{n}}, \quad \bar{X} + t_{\alpha/2,n-1}\frac{S}{\sqrt{n}}].$$

Med $\alpha = 0.01$ blir $t_{\alpha/2,n-1} = t_{0.005,9} = 3.250$, og med $\bar{x} = 49.86$, $n = 10$ og $s = 1.24$ blir 99% konfidensintervallet:

$$[49.86 - 3.250\frac{1.24}{\sqrt{10}}\, , \, 49.86 + 3.250\frac{1.24}{\sqrt{10}}] = \underline{\underline{[48.6\, , 51.1]}}$$

c)

$$H_0: \quad \mu \geq 50.5 \qquad \text{mot} \qquad H_1: \quad \mu < 50.5$$

Når vi har normalfordeling med ukjent σ tar vi utgangspunkt i

$$T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} = \frac{\bar{X} - 50.5}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$$

Med signifikansnivå 5%, dvs $\alpha = 0.05$, forkaster vi H_0 dersom $T \leq -t_{0.05,9} = -1.833$. Observert: $t = \frac{49.86-50.5}{1.24/\sqrt{10}} = -1.63$

Siden $-1.63 > -1.833$ blir konklusjonen at vi $\underline{\underline{\text{ikke forkaster } H_0}}$. Dataene gir ikke grunnlag for å konkludere at det nye materialet er hardere.

p-verdien blir her (siden vi har ensidig test av type "mindre enn"):

$$p - \text{verdi} = P(T \leq t_{obs}) = P(T < -1.63) = \underline{\underline{0.069}}$$

Dvs vi ser som over at vi ikke forkaster testen på 5% nivå (siden p-verdien>0.05).

Oppgave 2

a) For eksponensialfordeling har vi at $\mathrm{E}(T) = 1/\lambda = 1/0.2 = \underline{\underline{5}}$ og $\mathrm{Var}(T) = 1/\lambda^2$, dvs $\mathrm{SD}(T) = \sqrt{\mathrm{Var}(T)} = 1/\lambda = \underline{\underline{5}}$.

$$P(T > 5) = 1 - P(T \leq 5) = 1 - (1 - e^{-0.2 \cdot 5}) = e^{-1} = \underline{\underline{0.368}}$$

Eventuelt kan man integrere over sannsynlighetstetten $f(t) = 0.2e^{-0.2t}$ fra 5 til ∞.

b) Estimert forventet levetid er gitt ved `mean(w)`: $\hat{E}(X) = \underline{\underline{1.67}}$

Estimert sannsynlighet for å fungere i mindre enn 5 år er gitt ved `mean(w<5)`: $= \underline{\underline{0.951}}$

La T_1, T_2 og T_3 være levetiden til hver av pumpene, og la $W = \min\{T_1, T_2, T_3\}$ være levetiden til systemet. Dersom systemet fungerer i *mer* enn fem år må alle pumpene fungere i mer enn fem år. Dermed kan vi finne sannsynligheten for at levetiden til systemet er mindre enn fem år ved:

$$P(W < 5) = 1 - P(W > 5) = 1 - P(T_1 > 5 \cap T_2 > 5 \cap T_3 > 5) = 1 - (e^{-1})^3 = \underline{\underline{0.950}}$$

Vi ser veldig god overenstemmelse mellom simulert resultat og eksakt verdi.

c) For hver simulering må vi nå simulere levetiden til hver av de tre pumpene fra tre forskjellige eksponentialfordelinger, med hhv $\lambda = 1/5$, $\lambda = 1/6$ og $\lambda = 1/7$, og så ta minimum av de tre simulerte tidene. Dette kan vi f.eks. gjøre ved å bytte ut `rexp(3,rate=0.2)` med å simulere de tre tidene og ta minimum av disse:

```
nsim <- 100000
w <- numeric(nsim)
for(i in 1:nsim)
  w[i] <- min(rexp(1,rate=1/5),rexp(1,rate=1/6),rexp(1,rate=1/7))
```

En alternativ måte å skrive `for`-løkka kan være:

```
for(i in 1:nsim){
  T1 <- rexp(1,rate=1/5)
  T2 <- rexp(1,rate=1/6)
  T3 <- rexp(1,rate=1/7)
  w[i] <- min(T1, T2, T3)
}
```

For systemet med fire pumper som fungerer så lenge minst tre pumper fungerer så må vi først simulere fire levetider fra eksponentialfordelingen med $\lambda = 1/5 = 0.2$, så sortere disse tidene, og så ta ut den nest minste verdien. Systemet feiler den andre gangen en pumpe feiler, dvs ved den nest minste tiden. Dette kan f.eks. kodes slik:

```
nsim <- 100000
w <- numeric(nsim)
for(i in 1:nsim)
  w[i] <- sort(rexp(4,rate=1/5))[2]
```

Oppgave 3

Vi lar X være antall aviser som etterspørres. Siden vi ser på en dag er $t = 1$.

a)

$$\begin{aligned} P(X=3) &= \frac{2.5^3 e^{-2.5}}{3!} = \underline{\underline{0.214}} \\ P(X>3) &= 1 - P(X \leq 3) = 1 - (P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) + P(X=3)) \\ &= 1 - (\frac{2.5^0 e^{-2.5}}{0!} + \frac{2.5^1 e^{-2.5}}{1!} + \frac{2.5^2 e^{-2.5}}{2!} + \frac{2.5^3 e^{-2.5}}{3!}) \\ &= 1 - (0.0821 + 0.2052 + 0.2565 + 0.2138) = 1 - 0.7576 = \underline{\underline{0.242}} \end{aligned}$$

b) La Y være antall aviser som blir solgt og la W være fortjenesten fra salg av avisen. Vi har da at

$$W = 10Y - 2(4 - Y) = 10Y - 8 + 2Y = 12Y - 8$$

Vi har nå at $\mathrm{E}(W) = \mathrm{E}(12Y - 8) = 12\mathrm{E}(Y) - 8$, men for å finne $\mathrm{E}(Y)$ må vi først finne fordelingen til Y. Merk at antall aviser som selges er lik antall aviser som etterspørres så lenge det ikke etterspørres mer enn 4 aviser. Dersom et etterspørres mer enn 4 aviser er antall aviser som selges også 4 siden kiosken bare tar inn 4 aviser. Fordelingen til Y blir da:

y	$P(Y = y)$
0	$P(Y=0) = P(X=0) = 0.0821$
1	$P(Y=1) = P(X=1) = 0.2052$
2	$P(Y=2) = P(X=2) = 0.2565$
3	$P(Y=3) = P(X=3) = 0.2138$
4	$P(Y=4) = P(X \geq 4) = 1 - P(X \leq 3) = 0.2424$

Da blir $\mathrm{E}(Y) = \sum yP(Y=y) = 0 \cdot 0.0821 + 1 \cdot 0.2052 + 2 \cdot 0.2565 + 3 \cdot 0.2138 + 4 \cdot 0.2424 = 2.3292$ slik at

$$\mathrm{E}(W) = 12\mathrm{E}(Y) - 8 = 12 \cdot 2.3292 - 8 = \underline{\underline{19.95}}$$

Alternativt kan vi regne ut de forskjellige mulige fortjenestene (fra $W = 12Y - 8$) og sannsynligheten for de:

w	$P(W = w)$
-8	$P(W=-8) = P(Y=0) = P(X=0) = 0.0821$
4	$P(W=2) = P(Y=1) = P(X=1) = 0.2052$
16	$P(W=16) = P(Y=2) = P(X=2) = 0.2565$
28	$P(W=28) = P(Y=3) = P(X=3) = 0.2138$
40	$P(W=40) = P(Y=4) = P(X \geq 4) = 1 - P(X \leq 3) = 0.2424$

Forventet fortjeneste finner vi da som:

$$\mathrm{E}(W) = \sum wP(W=w) = -8 \cdot 0.0821 + 4 \cdot 0.2052 + 16 \cdot 0.2565 + 28 \cdot 0.2138 + 40 \cdot 0.2424 = \underline{\underline{19.95}}$$